ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.76

КЛИФФОРДОВЫ СТРУКТУРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.П.Бурлаков
(Чечено-Ингушский университет)

Пусть M -дифференцируемое многообразие, $\dim M = n$; $T(M)$ - тензорное расслоение над M, $E_T(M)$ пространство сечений тензорного расслоения $T(M)$; $Q(M)$ и $Q^*(M)$ подрасслоения ковариантных и контравариантных тензоров, $p: T(M) \to Q(M)$ и $p^*: T(M) \to Q^*(M)$ естественные проекции; $E_Q(M)$ и $E_{Q^*}(M)$ пространства сечений расслоений $Q(M)$ и $Q^*(M)$. Пространства $E_T(M)$, $E_Q(M)$ и $E_{Q^*}(M)$ представляют собой градуированные кольца

$$E_T(M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} E_T^m(M),\; E_Q(M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} E_Q^m(M),\; E_{Q^*}(M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} E_{Q^*}^m(M),$$

проекции p и p^* индуцируют гомоморфизмы колец

$$\hat{p}: E_T(M) \to E_Q(M),\quad \hat{p}^*: E_T(M) \to E_{Q^*}(M),$$

сохраняющие градуировку.

Если на M определена риманова метрика g, то элементы $\xi \otimes \xi - g(\xi,\xi)$, $\xi \in E_Q^1(M)$ порождают в кольце $E_Q(M)$ идеал $J(M)$; факторкольцо

$$\mathbb{C}(M) = E_Q(M)/J(M) \qquad (1)$$

называется клиффордовой алгеброй над многообразием M с метрикой g [1]. $\mathbb{C}(M)$ может быть представлена как пространство сечений $\Lambda(M)$ кососимметричных контравариантных тензоров; в качестве слоя Λ_x выбирается алгебра ростков полей $\xi \in \mathbb{C}(M)$ в точке $x \in M$. Если e_i -базис в пространстве Q_x^1, то 1, e_i, $e_i \wedge e_j, \ldots, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ образуют базис в пространстве Λ_x. Клиффордово произведение базисных элементов определяется формулой

$$e_i \cdot e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} = \begin{cases} (-1)^m g(e_i e_i) e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-1}} \wedge e_{j_{m+1}} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, & i = j_m; \\ e_i \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, & i \neq j_m. \end{cases} \qquad (2)$$

По ассоциативности формула (2) определяет клиффордово произведение на произвольных элементах базиса Λ_x; с базиса на произвольные элементы Λ_x, т.е. на формальные суммы m -векторов, клиффордово произведение распространяется по линейности и дистрибутивности. Расслоение $\Lambda(M) = \bigcup_{x \in M} \Lambda_x$ есть расслоение m -векторов над M. Существует естественная проекция $a: Q(M) \to \Lambda(M)$, порождающая гомоморфизм колец $\hat{a}: E_Q(M) \to \mathbb{C}(M)$, сохраняющий градуировку. Кольцо $\mathbb{C}(M)$ дополнительно приобретает структуру $\mathbb{Z}_2$ -градуировки.

Аналогично, на основе расслоения $Q^*(M)$ можно построить клиффордову алгебру $\mathbb{C}^*(M)$. Кольца $C(M)$ и $C^*(M)$ взаимно дуальны в следующем смысле: внутреннее произведение в прямой сумме $Q_1(M) \oplus Q_1^*(M)$ индуцирует супердифференцирование в алгебрах $C(M)$ и $C^*(M)$; на базисе этих алгебр в фиксированной точке:

$$e_i(\omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_k}) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_{m-1}} \wedge \omega^{j_{m+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_k}, & i = j_m; \\ 0, \; i \neq j_m, & m = \overline{1,k}; \end{cases} \qquad (3)$$

где ω^i базис Q_1^* в точке $x \in M$. Справедлива и двойственная формула:

$$\omega^i(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = \begin{cases} (-1)^{m-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-1}} \wedge e_{j_{m+1}} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, & i = j_m; \\ 0, \; i \neq j_m, & m = \overline{1,k}. \end{cases} \qquad (3')$$

Повторное супердифференцирование определяет внутреннее произведение на прямой сумме алгебр $\mathbb{C}(M) \oplus \mathbb{C}^*(M)$, если $e_A = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $\omega^B = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_m}$, то

$$\langle e_A, \omega^B \rangle = e_A(\omega^B) \cdot \omega^B(e_A) = \delta_A^B. \qquad (4)$$

Внутреннее произведение с базиса на произвольные элементы $\mathbb{C}(M)$ и $\mathbb{C}^*(M)$ распространяется по линейности.

Пусть $N \subset M$ -дифференцируемое подмногообразие (поверхность в M), $\mathbb{C}_N(M)$ -ограничение кольца $\mathbb{C}(M)$ на N. Если $\eta \in \mathbb{C}_N(M)$, то η есть поле формальных сумм m -векторов, заданных на поверхности N. Рассмотрим $\mathbb{C}_N(M) \otimes \mathbb{C}_m^*(N)$, $\dim N = m$, элементы алгебры $\xi \in \mathbb{C}_N(M) \otimes \mathbb{C}^*(N)$ называются инфинитезимальным оснащением поверхности N, если $pr_{\mathbb{C}^*(N)} \in \mathbb{C}_m^*(N)$. Пару (N, ξ) будем называть оснащенной поверхностью; интеграл по оснащенной поверхности (N, ξ)

определяется формулой

$$\int_{\xi} = \int_{W}\dots\int \langle \omega, \xi \rangle, \qquad (5)$$

где W -параметрическое пространство поверхности $\mathcal{N}$. В частности, если ξ касательные m -векторы к поверхности $\mathcal{N}$, то интеграл в правой части формулы (5) есть поверхностный интеграл в обычном смысле. Пусть $\varphi \in GL(2^n)$, тогда

$$\int_{(\Phi^{-1})^T \xi} \varphi(\omega) = \int_{\xi} \omega, \qquad (6)$$

в частности, если $\theta \in O(2^n)$, то

$$\int_{\theta(\xi)} \theta(\omega) = \int_{\xi} \omega. \qquad (7)$$

В приложениях часто встречается случай, когда $J \in O(2^n)$ -инволюция (в частности, например, оператор Ходжа $*$). Тогда из (7) легко получить

$$\int_{J(\xi)} \omega = \int_{\xi} J(\omega). \qquad (8)$$

Интегрирование, определенное формулой (5), легко обобщается на обобщенные цепи:

$$\sigma = \bigoplus_{\nu} a_{\nu} (\mathcal{N}_{\nu}, \xi_{\nu}), \qquad (9)$$

где $\mathcal{N}_{\nu}$ могут иметь разную размерность. По аддитивности

$$\int_{\sigma} \omega = \sum_{\nu} a_{\nu} \int_{\xi_{\nu}} \omega. \qquad (10)$$

Библиографический список

1. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412с.

2. Бурлаков М.П. Клиффордовы расслоения/ Чечено-Ингушский университет. Грозный, 1984. Деп. в ВИНИТИ 10.05.84, № 2984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 18 1987

УДК 514.75

ПСЕВДОКОНФОРМНОЕ И ПОЧТИ КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ В E_3

М.А. Гдоян

(Кироваканский пединститут)

В работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии гладкого частичного псевдоконформного или почти конформного отображения трехмерной сферы S_3 в евклидово пространство E_3 с использованием графика V_3^* отображения.

1. Рассмотрим евклидовы пространства E_4 и E_3 как вполне ортогональные подпространства в собственно евклидовом пространстве E_7, имеющие одну общую точку O, которая является центром трехмерной сферы S_3 с радиусом r, лежащей в E_4. Будем изучать дифференцируемое взаимно однозначное отображение $f: S_3 \to E_3$, которое переводит область $\Omega \subset S_3$ в некоторую область $\bar{\Omega} \subset E_3$. Если точка X_1 описывает область Ω, то точка $X_2 = f(X_1)$ описывает область $\bar{\Omega}$, а точка X с радиус-вектором $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$, где $\vec{X}_1 = \vec{OX}_1$, $\vec{X}_2 = \vec{OX}_2$, опишет поверхность V_3^*, называемую графиком отображения f [1].

Пусть $R^{X_1} = \{X_1, \vec{e}_i, \vec{e}_4\}$, $R^{X_2} = \{X_2, \vec{e}_{4+i}\}$ $(i,j = 1,2,3)$ соответствующие подвижные реперы в E_4 и E_3, причем R^{X_1} -ортонормированный, $\vec{e}_4 \parallel \vec{X}_1$, $\vec{e}_i \in T(X_1)$ (касательное пространство к сфере S_3 в точке X_1), а $\vec{e}_{4+i} = f_{*X_1}(\vec{e}_i)$ (f_{*X_1} -индуцированное отображение) и R^{X_1} построен на касательных к линиям основания σ_3 отображения [3]. В точке $X \in V_3^*$ возникает репер $R^X = \{X, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_4, \vec{\varepsilon}_{4+i}\}$, где $\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{4+i}$, $\vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_4$,

$\vec{\varepsilon}_{4+i} = \vec{e}_i - \gamma_{ik} \bar{\gamma}^{kt} \vec{e}_{4+t}$, $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, $\bar{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{4+i} \vec{e}_{4+j}$, $g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j$;

деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$d\vec{X}_1 = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^4 \vec{e}_4, \quad d\vec{e}_4 = \omega_4^i \vec{e}_i; \qquad (1)$$

$$d\vec{X}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{4+i}, \quad d\vec{e}_{4+i} = \bar{\omega}_i^j \vec{e}_{4+j}; \qquad (2)$$